

Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019

Aufgaben zum Thema **Potenzen, Wurzel, Logarithmen** mit Lösungen

DR. ANTON MALEVICH, LEONARD BECHTEL, JULIAN MAAS

Aufgabe 1 (1) Schreiben Sie die nachfolgenden Ausdrücke als ganze Zahlen oder als nicht vereinfachbare Brüche.

- | | | |
|---------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $(-2)^3$, | g) 11^{-2} , | m) $(\frac{3}{2})^{-4}$, |
| b) 2^{-3} , | h) $(-3)^{-3}$, | n) $(\frac{6}{5})^0$, |
| c) 3^{-4} , | i) $(-2)^{-4}$, | o) $(\frac{4}{3})^3$, |
| d) 2^8 , | j) $(\frac{2}{3})^2$, | p) $(\frac{6}{7})^{-2}$, |
| e) $(-4)^5$, | k) $(\frac{4}{5})^3$, | q) $(\frac{3}{6})^{-5}$. |
| f) 2^0 , | l) $(\frac{7}{9})^{-1}$, | |

Lösung.

- | | | |
|---------------------|-----------------------|----------------------|
| a) -8 , | g) $\frac{1}{121}$, | l) $\frac{9}{7}$, |
| b) $\frac{1}{8}$, | h) $-\frac{1}{27}$, | m) $\frac{16}{81}$, |
| c) $\frac{1}{81}$, | i) $\frac{1}{16}$, | n) 1 , |
| d) 256 , | j) $\frac{4}{9}$, | o) $\frac{64}{27}$, |
| e) -1024 , | k) $\frac{64}{125}$, | p) $\frac{49}{36}$, |
| f) 1 , | | q) 32 . |

□

Aufgabe 2 (1) Schreiben Sie in Standardform, d.h. $a\sqrt{b}$, wobei $a \in \mathbb{Q}$ und \sqrt{b} nicht vereinfachbar ist.

- | | | |
|-------------------|---|------------------------------------|
| a) $\sqrt{36}$, | h) $\sqrt{288}$, | o) $\sqrt{\frac{2}{3}}$, |
| b) $\sqrt{8}$, | i) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$, | |
| c) $\sqrt{18}$, | j) $2\sqrt{14} \cdot (-3\sqrt{21})$, | p) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, |
| d) $\sqrt{72}$, | k) $3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{15} \cdot 4\sqrt{10}$, | |
| e) $\sqrt{96}$, | l) $-5\sqrt{5} \cdot 10\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{2}$, | q) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$, |
| f) $\sqrt{147}$, | m) $(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$, | |
| g) $\sqrt{242}$, | n) $(\frac{\sqrt{2}}{3})^3$, | r) $\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$. |

Lösung.

- | | | |
|-------------------|--------------------|----------------------------|
| a) 6, | h) $12\sqrt{2}$, | n) $\frac{2}{9}$, |
| b) $2\sqrt{2}$, | i) $5\sqrt{6}$, | o) $\sqrt{\frac{2}{3}}$, |
| c) $3\sqrt{2}$, | j) $-42\sqrt{6}$, | p) $\sqrt{\frac{15}{2}}$, |
| d) $6\sqrt{2}$, | k) 1440, | q) $\sqrt{\frac{6}{5}}$, |
| e) $4\sqrt{6}$, | l) -1000 , | r) $2\sqrt{2}$. |
| f) $7\sqrt{3}$, | m) $\frac{3}{4}$, | |
| g) $11\sqrt{2}$, | | |

□

Aufgabe 3 (1) Schreiben Sie als n -te Wurzel in Standardform, d.h. $a\sqrt[n]{b}$, $a \in \mathbb{Q}$ und $\sqrt[n]{b}$ nicht vereinfachbar

- | | | |
|-----------------------------------|--|--|
| a) $\sqrt[3]{\frac{1}{343}}$, | f) $3^{-\frac{1}{2}}$, | l) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$, |
| b) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, | g) $9^{-\frac{2}{5}}$, | |
| c) $\sqrt[4]{\frac{1296}{625}}$, | h) $\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$, | m) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}}$, |
| d) $\sqrt[3]{\frac{3}{25}}$, | i) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{16}$, | |
| e) $5^{-\frac{2}{7}}$, | j) $\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[4]{27}$, | n) $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[2]{2}}$. |
| | k) $\sqrt[4]{49} \cdot \sqrt[2]{7}$, | |

Aufgabe 4 (2) Vereinfachen Sie die nachfolgenden Ausdrücke soweit wie möglich.

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| a) $2^{(3^5)}$, | d) $2^{1+x} \cdot 3^x$, | g) $\sqrt{9^{x-1}}$, |
| b) $(2^3)^5 \cdot (2^5)^3$, | e) $\frac{4^{2x}}{2^x}$, | h) $\sqrt[5]{10^{20x+10}}$, |
| c) $\frac{2^{(3^5)}}{2^{(5^3)}}$, | f) $(2^{3-2x})^4$, | i) $\frac{2^x \cdot 4^{1-x}}{8^x}$. |

Aufgabe 5 (3) Ermitteln Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$x^{x^{x^{x^{\dots}}}} = 2$$

Aufgabe 6 (1) Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

- a) i) $2^{(3^5)}$, ii) $2^{1+x} \cdot 3^x$, iii) $\sqrt{9^{x-1}}$, iv) $\sqrt[5]{10^{20x+10}}$, v) $2^x \cdot 4^{1-x} \cdot 8^x$.
 b) i) $\log_3 \frac{2}{9} - \log_3 \frac{8}{27}$, ii) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_2 5$ iii) $\frac{\log_5 8}{\log_5 4}$,
 iv) $\log_5 8 \cdot \log_5 4$, v) $\log_{10} 64 - \log_{10} \frac{1}{2}$, vi) $\log_2 5 + \log_2 3$.

Aufgabe 7 (1) Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

- a) $2^{10} 3^{10} - 6^4 6^6 + 2^{-2}$,
 b) $\log_2(8 \cdot 32) + \log_3(\frac{1}{9}) - \ln(e^6)$,
 c) $e^{3 \ln(2)} - \left(2^{\log_{10}(10^3)}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + e^0$

Aufgabe 8 (2)

- a) Zeigen Sie: $\log_a b = \log_{a^n}(b^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$, $a \neq 1$.
 b) Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
 i) $\frac{3^{(3^3)}}{(3^3)^3}$, ii) $\log_2 10 \cdot \log_{10} 2$, iii) $\log_3 \frac{5}{4} + \log_9 \frac{24}{5} - \log_9 \frac{5}{6}$, iv) $\frac{\ln(10^{\ln(e^2)})}{\ln 5 + \ln 2}$.
 c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
 i) $4^x = 0,125$, iii) $\log_2(10x) = 1 + \log_2 5$,
 ii) $3 \ln x = \ln 56 - \ln 7$, iv) $\ln x = 2 \ln 5 + 3 \ln 2$.

Aufgabe 9 (2) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $2^{x^2} = \frac{1}{4^{x-2}}$?

Lösung. Wir nehmen \ln auf beiden Seiten von $2^{x^2} = \frac{1}{4^{x-2}}$ (\ln ist bijektiv und Argumente positiv). Es gilt

$$\begin{aligned} \ln(2^{x^2}) &= \ln\left(\frac{1}{4^{x-2}}\right) \\ x^2 \ln 2 &= \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln(4^{x-2}) \\ x^2 \ln 2 &= -(x-2) \ln 4 \\ x^2 \ln 2 &= -(x-2) \ln(2^2) \\ x^2 \ln 2 &= -2(x-2) \ln 2 \\ x^2 &= -2(x-2) \\ x^2 + 2(x-2) &= 0 \\ x^2 + 2x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

und die Lösungen sind $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+4} = -1 \pm \sqrt{5}$. □